Chapitre 2 : Calcul matriciel

2.1 Opérations matricielles

Les opérations sur les vecteurs vues dans le chapitre précédent s'étendent naturellement aux matrices. On dit que deux matrices A et B de taille $m \times n$ sont égales si elles ont la même taille et que les coefficients sont tous égaux deux à deux : pour tout $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, $a_{ij} = b_{ij}$.

— Nous noterons $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $m \times n$.
— Nous dirons qu'une matrice est carrée si elle a autant de lignes que de colonnes. On pourra dire qu'une matrice de taille $n \times n$ est carrée de taille n.
— Nous noterons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$.
— Nous noterons $0_{m\times n} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, la matrice $m \times n$ dont toutes les composantes sont nulles.
— Nous noterons $0_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont nuls.
— Nous noterons $\mathbb{I}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice carrée de taille n dont toutes les composantes sont nulles hors de la diagonale et valent 1 sur la diagonale.
— Une matrice est dite diagonale si tous ses coefficients sont nuls, sauf ceux qui sont sur la diagonale : $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
— Une matrice est triangulaire supérieure si tous les coefficients strictement au-dessous de la diagonale sont nuls.
— Une matrice est triangulaire inférieure si tous les coefficients strictement au-dessus de la diagonale sont nuls.

2.1.1 Somme de deux matrices et multiplication par un scalaire

Somme de deux matrices

Soit $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ deux matrices $m \times n$, alors la somme $A + B$ est la matrice $m \times n$ donnée par :

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Remarque importante 2.1

Attention, on ne peut additionner que des matrices de même taille.

Exemple. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}7 & 8 & 9\\ 10 & 11 & 12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8 & 10 & 12\\ 14 & 16 & 18\end{bmatrix}$

Multiplication d'une matrice par un scalaire

Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice $m \times n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors le produit de la matrice A par le scalaire λ est la matrice $m \times n$ donnée par :

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemple. $-5\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5 & -10 & -15\\ -20 & -25 & -30\end{bmatrix}$

Théorème 2.2

Soit A, B, C trois matrices de taille $m \times n$, λ, μ deux scalaires et notons $0_{m\times n}$ la matrice nulle de même taille que A, B et C. On a alors les propriétés suivantes :

commutativité de l'addition $A + B = B + A$

associativité de l'addition $A + (B + C) = (A + B) + C$

élément neutre pour l'addition $A + 0_{m\times n} = A$

distributivité 1 $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

distributivité 2 $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

associativité de la multiplication $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

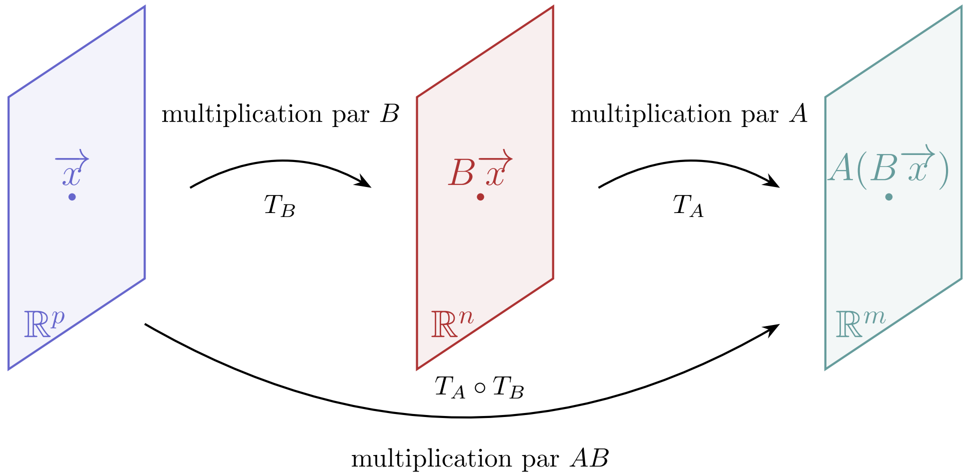
Démonstration. Il suffit de l'écrire, étape après étape, en appliquant les propriétés d'addition et de multiplication des réels à chaque composante des matrices. □

2.1.2 Multiplication matricielle

Définition du produit matriciel

Nous avons vu au chapitre précédent comment multiplier une matrice et un vecteur. Nous avons vu que cela correspondait à appliquer une application linéaire à ce vecteur. Nous allons maintenant voir comment multiplier deux matrices entre elles. Cela correspond à composer deux applications linéaires.

Soit A une matrice $m \times n$, et $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'application linéaire associée. Soit B une matrice $n \times p$, et $T_B : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire associée. Soit $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^p$.



Le produit de la matrice A avec la matrice B, noté AB est la matrice associée à l'application linéaire $T_A \circ T_B$, la composition de T_A après T_B :

$$(T_A \circ T_B)(\overrightarrow{x}) = (AB)\overrightarrow{x} \text{ pour tout } \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^p.$$

Or

$$(T_A \circ T_B)(\overrightarrow{x}) = T_A(T_B(\overrightarrow{x})) = A(B\overrightarrow{x}),$$

nous devons alors avoir, par construction, $(AB)\overrightarrow{x} = A(B\overrightarrow{x})$.

En pratique, comment calculer AB ?

Notons $\overrightarrow{b_1}, \cdots, \overrightarrow{b_p}$ les colonnes de B et $x_1, \cdots, x_p$ les composantes de $\overrightarrow{x}$. Alors

$$B\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{b_1} + \cdots + x_p\overrightarrow{b_p}.$$

Donc, par linéarité,

$$A(B\overrightarrow{x}) = x_1 A\overrightarrow{b_1} + \cdots + x_p A\overrightarrow{b_p}.$$

Alors, pour avoir l'égalité $(AB)\overrightarrow{x} = A(B\overrightarrow{x})$, on définit les colonnes du produit AB comme étant $A\overrightarrow{b_1}, \cdots, A\overrightarrow{b_p}$.

Exemple. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$. Alors

$$A\overrightarrow{b_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 \\ 139 \end{bmatrix}.$$

De même, $A\overrightarrow{b_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 \\ 154 \end{bmatrix}$. Donc $AB = \begin{bmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{bmatrix}$.

En pratique, on utilisera plutôt la règle ligne-colonne expliquée ci-dessous, pour multiplier les matrices.

Remarque importante 2.3

Remarquons que pour les dimensions des matrices : A *une matrice* $m \times n$, B *une matrice* $n \times p$, la matrice A a autant de colonnes que B a de lignes. Cette condition est nécessaire, et il faudra y être attentif lorsque l'on multipliera des matrices entre elles.
Cette condition est en effet nécessaire pour que la composition $T_A \circ T_B$ soit définie : l'espace d'arrivée de B doit être identique à l'espace de départ de A.
Cette condition est aussi nécessaire pour que chacun des produits matrice-vecteur $A\overrightarrow{b_i}$ soit défini.
La matrice AB est de taille $m \times p$ (elle envoie un vecteur de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^m$).

Remarques 2.2.0.4.

1. *Un vecteur de* $\mathbb{R}^p$ *peut être vu comme une matrice* $p \times 1$. *Le produit matrice-vecteur est cohérent avec le produit matriciel dans ce cas.*
2. *Si* A *est de taille* $1 \times n$ *et* B *est de taille* $n \times 1$, *alors* AB *est de taille* 1×1. *Autrement dit,* AB *est un scalaire.*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}}_{1\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{n\times 1} = \underbrace{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n}_{\in \mathbb{R}}$$

3. *Si* A *est de taille* $m \times 1$ *et* B *est de taille* $1 \times n$, *alors* AB *est de taille* $m \times n$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}}_{m\times 1} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}}_{1\times n} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \cdots & a_m b_n \end{bmatrix}$$

4. *Il est toujours possible de multiplier des matrices carrées de même taille. Le résultat est une matrice carrée de même taille. Il est par contre impossible de multiplier des matrices carrées de taille différente.*
5. *Les multiplications successives d'une matrice carrée par elle-même peuvent être notées comme une puissance :*

$$A^0 = \mathbb{I}_n, \quad A^1 = A, \quad A^2 = AA, \quad A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ fois}}.$$

Exemple. Calculer en exercice, les puissances successives d'une matrice diagonale.

Règle ligne-colonne

On a vu que la j-ème colonne du produit AB s'écrit $A\overrightarrow{b_j}$. Qu'en est-il de chacune des composantes de ces colonnes ?

$$A\overrightarrow{b_j} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \cdots + a_{1n}b_{nj} \\ a_{21}b_{1j} + a_{22}b_{2j} + \cdots + a_{2n}b_{nj} \\ \vdots \\ a_{m1}b_{1j} + a_{m2}b_{2j} + \cdots + a_{mn}b_{nj} \end{bmatrix}$$

Chaque composante de cette colonne est le produit d'une matrice ligne par une matrice colonne (voir point 2 de la remarque 2.2.0.4).

Donc, si on note $AB = C$, on a la composante c_{ij} qui correspond au produit de la i-ème ligne de A par la j-ème colonne de B : $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

Exemple. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, alors

$$AB = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 - 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 4 - 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 2 + 0\cdot 1 - 2\cdot 0 & 3\cdot 4 + 0\cdot(-1) - 2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$$

Théorème 2.5

Soit A une matrice $m \times n$ et B et C des matrices telles que les produits ci-dessous soient définis. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(A + B)C = AC + BC$
4. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
5. $A = A\mathbb{I}_n$ et $\mathbb{I}_m A = A$

Remarque importante 2.6

Certaines habitudes prises avec la multiplication des nombres réels doivent disparaître avec le calcul matriciel. Notamment, le produit matriciel n'est pas commutatif. C'est-à-dire que l'égalité $AB = BA$ est fausse en général. En fait, il se peut même que AB soit défini, mais pas BA. De plus, il se peut que deux matrices A et B soient non nulles, mais que leur produit soit nul !

Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, alors $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

De même il est possible d'avoir $B \neq C$, mais $AB = AC$ pour une certaine matrice A. Par exemple, si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Alors $AB = AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2.2 Transposée d'une matrice

Définition 2.7 *Matrice transposée*

Soit A une matrice de taille $m \times n$. La transposée de A, notée A^T, est la matrice de taille $n \times m$ dont les colonnes sont les lignes de A.

Exemple. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, alors $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Théorème 2.8

Soit A et B deux matrices telles que les sommes et les produits ci-dessous aient un sens. Alors, on a :

— $(A^T)^T = A$
— $(A + B)^T = A^T + B^T$
— $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
— $(AB)^T = B^T A^T$

Démonstration. Exercice □

Exemple. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, et $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$,

alors $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

On a $(A^T)^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$A+B=\begin{bmatrix}4 & 3 & -1\\ -1 & 0 & 3\end{bmatrix} \text{ et } A^T+B^T=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 3 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}.$$

$$AC=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}, (AC)^T=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \text{ et } C^TA^T=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Définition 2.9 *Matrice symétrique*

Soit A une matrice de taille $n\times n$. On dit que A est symétrique si $A=A^T$. Dans ce cas, les coefficients de A vérifient $a_{ij}=a_{ji}$. On dit que A est antisymétrique si $A=-A^T$. Dans ce cas, les coefficients de A vérifient $a_{ij}=-a_{ji}$.

Exemple. $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ est symétrique, et pas antisymétrique. La matrice $\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$ est antisymétrique et pas symétrique.

Remarques 2.2.0.10.

1. *Si A est antisymétrique, la diagonale de A est nulle, car tous ses éléments vérifient $a_{ii}=-a_{ii}$.*
2. *La matrice nulle est à la fois symétrique et antisymétrique (c'est la seule).*
3. *La matrice identité est symétrique.*
4. *la matrice $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ n'est ni symétrique ni antisymétrique.*

Théorème 2.11

Toute matrice A de taille $n\times n$ est la somme d'une matrice symétrique et antisymétrique.

Démonstration. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}A\\ &= \tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}A+0_n\\ &= \tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}A^T-\tfrac{1}{2}A^T\\ &= \tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}A^T+\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}A^T\\ &= \tfrac{1}{2}(A+A^T)+\tfrac{1}{2}(A-A^T)\end{aligned}$$

Or $A+A^T$ est symétrique car

$$(A+A^T)^T=A^T+(A^T)^T=A^T+A,$$

et $A-A^T$ est antisymétrique, car

$$(A-A^T)^T=A^T-(A^T)^T=A^T-A=-(A-A^T).$$

$\square$

Exemple. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, alors $\frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$ est symétrique, et $\frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$ est antisymétrique.

2.3 Matrices inversibles

Définition 2.12 *Matrice inversible*

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = \mathbb{I}_n$. On note alors A^{-1} l'inverse de A.

Exemple. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre. En effet,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarques 2.2.0.13.

1. *Si une matrice A est inversible, son inverse est unique. En effet, soit B et C deux matrices telles que $AB = BA = \mathbb{I}_n$ et $AC = CA = \mathbb{I}_n$. Alors d'une part, $C(AB) = C\mathbb{I}_n = C$ et $(CA)B = \mathbb{I}_n B = B$, donc $B = C$.*
2. *Seules les matrices carrées peuvent être inversibles. En effet, pour que la double égalité $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}_n$, soit définie, il faut que A et A^{-1} aient chacune n lignes et n colonnes.*

Dans $\mathbb{R}$, on peut diviser par tout nombre non-nul. Autrement dit : tous les nombres sont inversibles, sauf 0. Cela permet de résoudre des équations. Par exemple, si on a $4x = 13$, on en déduit $x = \frac{1}{4} \cdot 13$. Mais cela ne se généralise pas naïvement aux matrices. C'est-à-dire que si on a une équation vectorielle $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, **on ne peut pas écrire** $\overrightarrow{x} = \frac{1}{A}\overrightarrow{b}$. Notons que c'est l'unique et dernière fois que nous noterons une fraction avec une matrice au dénominateur. Cette notation est mathématiquement incorrecte et ne doit jamais être utilisée. Par contre, si A est inversible, et seulement si A est inversible, on pourra écrire $\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b}$.

Théorème 2.14 *Propriétés d'une matrice inversible*

1. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors A^{-1} est aussi inversible, et $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont inversibles, alors $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors λA est inversible, et $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.
4. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Démonstration. 1. En effet, par définition, $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}_n$, donc A est l'inverse de A^{-1}.

2. Vérifions que $B^{-1}A^{-1}$ est l'inverse de AB :

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A\mathbb{I}_n A^{-1} = AA^{-1} = \mathbb{I}_n.$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}\mathbb{I}_n B = B^{-1}B = \mathbb{I}_n.$$

3.

$$\left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right)(\lambda A) = \frac{1}{\lambda}\lambda A^{-1}A = 1\mathbb{I}_n = \mathbb{I}_n.$$

$$(\lambda A)\left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right) = \lambda\frac{1}{\lambda}AA^{-1} = 1\mathbb{I}_n = \mathbb{I}_n.$$

4. Si A est inversible, alors $AA^{-1} = \mathbb{I}_n = A^{-1}A$, donc $(AA^{-1})^T = \mathbb{I}_n^T = (A^{-1}A)^T$, donc $(A^{-1})^T A^T = \mathbb{I}_n = A^T(A^{-1})^T$. Ce qui montre que A^T est inversible, et son inverse est $(A^{-1})^T$.

$\square$

Déterminer si une matrice est inversible et calculer un inverse

Concentrons-nous dans un premier temps sur le cas $n = 2$, et prenons l'exemple de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. On cherche l'existence d'une matrice $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}_2$.

On a $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3a+c & 3b+d \\ 5a+2c & 5b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Autrement dit, pour déterminer l'existence de tels a, b, c, d, on doit résoudre les systèmes

$$\begin{cases} 3a + c = 1 \\ 5a + 2c = 0 \end{cases}, \begin{cases} 3b + d = 0 \\ 5b + 2d = 1 \end{cases}.$$

Premier système :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} &\overset{L_2 \leftarrow 3L_2 - 5L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \\
&\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \\
&\overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Donc $a = 2, c = -5$.

Deuxième système :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} &\overset{L_2 \leftarrow 3L_2 - 5L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\
&\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\
&\overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Donc $b = -1, d = 3$.

Comme les deux systèmes sont compatibles, l'égalité $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2$ est vraie pour $a = 2, b = -1, c = -5, d = 3$.

Vérifions que l'égalité $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2$ est aussi vraie avec ces valeurs :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2.$$

Donc on a bien que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$.

Considérons maintenant, comme deuxième exemple, la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. On cherche l'existence d'une matrice $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}_2$.

On a $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Autrement dit, pour déterminer l'existence de tels a, b, c, d, on doit résoudre les systèmes

$$\begin{cases} a+c=1 \\ a+c=0 \end{cases}, \begin{cases} b+d=0 \\ b+d=1 \end{cases}.$$

Ces deux systèmes ne sont pas compatibles, donc la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ n'a pas d'inverse.

Les exemples ci-dessus montrent que dans le cas d'une matrice 2×2, on a deux systèmes à deux équations et deux inconnues chacun à résoudre. Pour une matrice $n \times n$, on aurait n systèmes, à n équations et n inconnues chacun. Nous verrons à la section 2.5, une méthode pour résoudre tous ces systèmes en même temps.

Cas particulier $n = 2$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$, et dans ce cas $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Exemples. 1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = -\dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ n'est pas inversible, car dans ce cas, $ad - bc = 0$.

Le nombre $ad - bc$ s'appelle le déterminant, et nous reviendrons sur cette notion au chapitre 3.

Matrices inversibles et systèmes

Théorème 2.15 *Équation matricielle avec matrice inversible*

Soit A une matrice $n \times n$. Si A est inversible, alors pour tout $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$, $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ admet une unique solution donnée par $A^{-1}\overrightarrow{b}$.

Démonstration. Montrons que

1. $A^{-1}\overrightarrow{b}$ est solution de $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$,
2. $A^{-1}\overrightarrow{b}$ est l'unique solution.

1. $A\left(A^{-1}\overrightarrow{b}\right) = \left(AA^{-1}\right)\overrightarrow{b} = \mathbb{I}_n\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}$.
2. Soit $\overrightarrow{v}$ une solution de $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$. Alors $A\overrightarrow{v} = \overrightarrow{b}$. Donc $A^{-1}A\overrightarrow{v} = A^{-1}\overrightarrow{b}$. Donc $\overrightarrow{v} = A^{-1}\overrightarrow{b}$.

□

2.4 Matrices élémentaires

Définition 2.16 *Matrice élémentaire*

Une matrice carrée de taille $n \times n$ est une matrice élémentaire si elle peut être obtenue à partir de la matrice identité $\mathbb{I}_n$ à l'aide d'une seule opération élémentaire sur ses lignes.

Il y a donc trois types de matrices élémentaires (illustrés ici dans le cas $n = 3$).

Type 1 $L_i \leftrightarrow L_j$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Type 2 $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Type 3 $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exemple. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ n'est pas une matrice élémentaire, car il faut deux opérations élémentaires pour transformer cette matrice en la matrice identité.

Propriété 2.17

Soit A une matrice $m \times n$ et E une matrice élémentaire de taille m. Alors EA est la matrice obtenue à partir de A avec l'opération élémentaire correspondant à E. Donc $EA \sim A$.

Remarques 2.2.0.18. *1. Attention ! On a bien multiplié A par la gauche : EA.*

2. La taille de E ne peut pas laisser place au doute : si E agit sur les lignes de A, alors E doit avoir autant de lignes que A.

Exemples. 1. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2a+d & 2b+e & 2c+f \end{bmatrix}$

Propriété 2.19

Si E est une matrice élémentaire, alors E est inversible. De plus, E^{-1} est une matrice élémentaire de même type que E.

Démonstration. Chaque opération élémentaire est inversible :

1. $L_i \leftrightarrow L_j$ a pour inverse $L_i \leftrightarrow L_j$.
2. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ a pour inverse $L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i$.
3. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ a pour inverse $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$.

Il suffit donc, pour prouver la proposition, de considérer la matrice élémentaire F correspondant à l'opération élémentaire inverse de celle de E, et on a alors : $EF = FE = \mathbb{I}_n$. □

Propriété 2.20

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Si R est la matrice échelonnée réduite associée à A. Alors il existe des matrices élémentaires $E_1, \dots, E_k$, telles que $E_k \cdots E_1 A = R$.

Démonstration. Chacune des E_i correspond à l'opération élémentaire effectuée à la i-ème étape d'échelonnage et réduction de A. □

2.5 Méthode de calcul de A^{-1}

Théorème 2.21 *A inversible $\Leftrightarrow A \sim \mathbb{I}_n$*

Soit A une matrice de taille $n \times n$. Nous avons alors l'équivalence A est inversible $\Leftrightarrow A \sim \mathbb{I}_n$. De plus, toute suite d'opération élémentaires transformant A en $\mathbb{I}_n$, transforme $\mathbb{I}_n$ en A^{-1}.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons A inversible. Alors le théorème 2.15 et le théorème 1.1.3.48 impliquent que A a un pivot par ligne. Or A est une matrice carrée, donc les pivots sont sur la diagonale. Donc la matrice échelonnée réduite de A est $\mathbb{I}_n$.

($\Leftarrow$) Supposons que $A \sim \mathbb{I}_n$, alors il existe des matrices élémentaires $E_1, \ldots, E_k$, telles que $E_k \cdots E_1 A = \mathbb{I}_n$. Comme chacune des $E_1, \ldots, E_k$ est élémentaire, elle est aussi inversible. Et leur produit l'est aussi. Donc

$$E_k \cdots E_1 A = \mathbb{I}_n \Rightarrow (E_k \cdots E_1)^{-1} E_k \cdots E_1 A = (E_k \cdots E_1)^{-1} \mathbb{I}_n.$$

Donc $A = (E_k \cdots E_1)^{-1} \mathbb{I}_n = (E_k \cdots E_1)^{-1}$. Donc A est inversible et

$$A^{-1} = E_k \cdots E_1 = E_k \cdots E_1 \cdot \mathbb{I}_n.$$

Donc la suite d'opérations élémentaires qui transforment A en $\mathbb{I}_n$ transforme aussi $\mathbb{I}_n$ en A^{-1}.

□

Ce théorème nous donne une méthode pratique pour savoir si une matrice est inversible, et pour calculer son inverse.

Méthode 2.22

Pour savoir si une matrice carrée de taille n est inversible et en même temps calculer son inverse, considérer la matrice $\begin{bmatrix} A & \mathbb{I}_n \end{bmatrix}$.

Effectuer sur $\begin{bmatrix} A & \mathbb{I}_n \end{bmatrix}$ les opérations élémentaires qui permettent de réduire A.

Si lors de la réduction, il y a une ligne dont les n premières composantes sont nulles, alors la matrice A n'est pas inversible.

Si la matrice A s'échelonne puis réduit en $\mathbb{I}_n$, alors la matrice $\begin{bmatrix} A & \mathbb{I}_n \end{bmatrix}$ s'échelonne et réduit en $\begin{bmatrix} \mathbb{I}_n & A^{-1} \end{bmatrix}$ avec la même suite d'opéraions élémentaires.

Exemples. — La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc A est inversible, et l'inverse est $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

— La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A n'est pas équivalente à la matrice identité, donc A n'est pas inversible.

Théorème 2.23 *Caractérisation des matrices inversibles*

Soit $A = \begin{bmatrix} \overrightarrow{a_1} & \cdots & \overrightarrow{a_n} \end{bmatrix}$ une matrice carrée de taille n. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. A est inversible
2. $A \sim \mathbb{I}_n$
3. La matrice échelonnée réduite de A a n pivots (un par ligne, un par colonne).
4. A^T est inversible.
5. A est un produit de matrices élémentaires.
6. L'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ possède $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ comme unique solution.
7. Les colonnes de A sont linéairement indépendantes.
8. L'application linéaire $\overrightarrow{x} \mapsto A\overrightarrow{x}$ est injective.
9. L'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ admet exactement une solution pour tout $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$.
10. Vect $(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}) = \mathbb{R}^n$.
11. L'application linéaire $\overrightarrow{x} \mapsto A\overrightarrow{x}$ est surjective.
12. Il existe une matrice carrée C telle que $CA = \mathbb{I}_n$ (inverse à gauche).
13. Il existe une matrice carrée D telle que $AD = \mathbb{I}_n$ (inverse à droite).

Démonstration. $1 \Leftrightarrow 2$ d'après le théorème 2.21
$2 \Leftrightarrow 3$ de manière évidente
$1 \Leftrightarrow 4$ d'après 2.14 et 2.8.
$2 \Leftrightarrow 5$ d'après la deuxième partie de 2.21.
$2 \Rightarrow 6$ de manière évidente
$6 \Leftrightarrow 7$ d'après le point 1a de la remarque 1.1.4.58.
$6 \Leftrightarrow 8$ d'après 1.1.5.85

$6 \Rightarrow 3$ d'après la section 1.3.3 et A a n colonnes.
$1 \Rightarrow 9$ d'après 2.15
$9 \Rightarrow 6$ de manière évidente.
$9 \Rightarrow 10$ d'après 1.1.3.48
$10 \Rightarrow 3$ d'après 1.1.3.48
$10 \Leftrightarrow 11$ d'après 1.1.5.81
$1 \Rightarrow 12$ et $1 \Rightarrow 13$ par définition.
$12 \Rightarrow 6$ car si $CA = \mathbb{I}_n$, alors $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{x} = CA\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

$13 \Rightarrow 11$ car si $AD = \mathbb{I}_n$, alors quel que soit $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{x} = D\overrightarrow{b}$ vérifie $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

□

Définition 2.24 *Matrice singulière*

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. On dit que A est singulière si A n'est pas inversible.

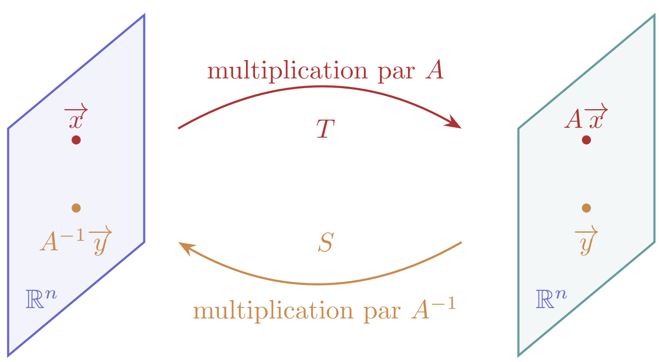
Remarque 2.2.0.25. *Une matrice carrée est soit inversible, soit singulière. Si une matrice n'est pas carrée, la question de l'inversibilité n'a pas de sens.*

2.6 Applications linéaires inversibles

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$, et $T: \begin{array}{ll} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \overrightarrow{x} & \longmapsto A\overrightarrow{x} \end{array}$.

Si A est inversible, alors A^{-1} existe et nous pouvons considérer l'application linéaire $S: \begin{array}{ll} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \overrightarrow{y} & \longmapsto A^{-1}\overrightarrow{x} \end{array}$.

Nous avons le schéma suivant :



Comme $A^{-1}A = I_n$ et $AA^{-1} = I_n$, les compositions $S \circ T$ et $T \circ S$ satisfont :

$$\begin{array}{ll} (S \circ T)(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} & \text{pour tout } \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \\ (T \circ S)(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{y} & \text{pour tout } \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

Définition 2.26 *Application linéaire inversible*

On dit que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire inversible s'il existe une application linéaire $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que

$$\begin{aligned} & S(T(\vec{x})) = \vec{x} \quad \text{pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \\ \text{et} \quad & T(S(\vec{y})) = \vec{y} \quad \text{pour tout } \vec{y} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Théorème 2.27 *Caractérisation des applications linéaires inversibles*

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire et soit A la matrice canoniquement associée à T. Nous avons l'équivalence :

$$T \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ inversible.}$$

Dans ce cas, l'application linéaire $S : \begin{array}{rl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{y} & \longmapsto A^{-1}\vec{y} \end{array}$ est l'unique application linéaire qui satisfait

$$\begin{aligned} & S(T(\vec{x})) = \vec{x} \quad \text{pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \\ \text{et} \quad & T(S(\vec{y})) = \vec{y} \quad \text{pour tout } \vec{y} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

On l'appelle *l'inverse de* T, notée T^{-1}.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons que T est inversible. On a $T(S(\vec{b})) = \vec{b}$ pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

Ainsi, $T(\vec{x}) = \vec{b}$ admet au moins une solution pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ et T est surjective. Le théorème de caractérisation des matrices inversibles 2.23 nous dit que dans ce cas, A est inversible.

($\Leftarrow$) Si A est inversible, alors l'application linéaire $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ associée à A^{-1} satisfait

$$\begin{aligned} & S(T(\vec{x})) = A^{-1}A\vec{x} = \vec{x} \quad \text{pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \\ \text{et} \quad & T(S(\vec{y})) = AA^{-1}\vec{y} = \vec{y} \quad \text{pour tout } \vec{y} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

donc T est inversible.

Montrons maintenant que S est unique.

Supposons que $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisfait aussi $U(T(\vec{x})) = \vec{x}$ et $T(U(\vec{y})) = \vec{y}$.

Comme T est surjective, pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ il existe (au moins) un $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $T(\vec{x}) = \vec{b}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} S(\vec{b}) &= S(T(\vec{x})) = (S \circ T)(\vec{x}) = \vec{x} \\ U(\vec{b}) &= U(T(\vec{x})) = (U \circ T)(\vec{x}) = \vec{x} \end{aligned}$$

donc $S(\vec{b}) = U(\vec{b})$ pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, donc $S = U$.

$\square$

Remarque 2.2.0.28. *Si T est inversible, T est bijective.*

2.7 Matrices par blocs

Nous avons vu qu'une matrice, si elle est initialement définie comme un tableau de nombres, peut être vue comme une liste de vecteurs colonnes. Or un vecteur colonne est une matrice à une colonne. Autrement dit, une matrice peut être vue comme une liste de matrices. Nous allons généraliser cette idée et considérer des matrices définies à partir de blocs de matrices.

Une matrice par blocs est définie non pas à partir de coefficients, mais de sous-matrices :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

Ici, chaque A_{ij} est une matrice de taille $m_i \times n_j$. De manière évidente, pour que cela soit correctement défini, les sous-matrices d'une même ligne ont toutes autant de lignes, et les sous-matrices d'une même colonne ont toutes autant de colonnes.

Exemple. La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$ peut être par exemple définie comme $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$ où $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$, $A_{13} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$, $A_{21} = \begin{bmatrix} 11 & 12 \end{bmatrix}$, $A_{22} = \begin{bmatrix} 13 & 14 \end{bmatrix}$, $A_{23} = \begin{bmatrix} 15 \end{bmatrix}$.

$$\begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \multicolumn{3}{c}{\left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{array}\right]} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array}$$

Cet exemple n'a pas un grand intérêt en soi, mais nous allons voir que définir une matrice avec des blocs permet de généraliser certaines propriétés de matrices de manière très intéressante.

Opérations sur les matrices par blocs

Soit A et B deux matrices de même taille, organisées en blocs tels que la taille de chaque A_{ij} est la même que celle de B_{ij}.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mn} \end{bmatrix},$$

Alors

$$A+B = \begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1n}+B_{1n} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2n}+B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}+B_{m1} & A_{m2}+B_{m2} & \cdots & A_{mn}+B_{mn} \end{bmatrix}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1n} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \cdots & \lambda A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{m1} & \lambda A_{m2} & \cdots & \lambda A_{mn} \end{bmatrix}$.

Pour multiplier deux matrices par blocs, on applique la règle classique du produit matriciel (produit ligne-colonne), mais en remplaçant les scalaires par les blocs correspondants.

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \underbrace{\hphantom{A_{11}}}_{n_1} & \underbrace{\hphantom{A_{12}}}_{n_2} & \underbrace{\hphantom{A_{13}}}_{n_3} \end{array} \end{array} m \times n \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}n_1 \\ \}n_2 \\ \}n_3 \end{array} \quad n \times p$$

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} \end{bmatrix} m \times p$$

Exemple

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 3 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \underbrace{\hphantom{3\ -1\ 0}}_{3} & \underbrace{\hphantom{2\ 0}}_{2} & \underbrace{\hphantom{1}}_{1} \end{array} \end{array} \qquad B = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ B_{11} \\ \\ \end{array}\right\} 3 \\ \left.\begin{array}{l} B_{21} \\ \end{array}\right\} 2 \\ B_{31}\} \ 1 \end{array}$$

où :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{23} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Le produit AB se calcule par blocs :

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} \\ \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} \end{bmatrix} 3 \times 3$$

Calculons chaque bloc :

$$A_{11}B_{11} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{12}B_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{13}B_{31} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_{21}B_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{22}B_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{23}B_{31} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$AB = \begin{bmatrix} 6+0+1 & -2+0+1 & 3+2+1 \\ 1+2+3 & 5+0+3 & 2+1+3 \\ 0+2+0 & 0+0+0 & 0+1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 6 \\ 6 & 8 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cas particuliers

Nous avons déjà vu des matrices partitionnées par colonnes : $A = \left[\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}\right]$.

Une matrice peut aussi être partitionnée par ligne :

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathrm{lgn}_1(A) \\ \mathrm{lgn}_2(A) \\ \vdots \\ \mathrm{lgn}_m(A) \end{bmatrix}$$

on dira que A est partitionnée en n colonnes ou en m lignes.
On peut alors écrire le produit matriciel de plusieurs façons :
Si A est de taille $m \times n$ et B est de taille $n \times p$, alors

1. $AB = A \underbrace{\begin{bmatrix} \overrightarrow{b_1} & \overrightarrow{b_2} & \cdots & \overrightarrow{b_p} \end{bmatrix}}_{\text{blocs colonnes}} = \underbrace{\begin{bmatrix} A\overrightarrow{b_1} & A\overrightarrow{b_2} & \cdots & A\overrightarrow{b_p} \end{bmatrix}}_{\text{blocs colonnes}}$

2. $$\underset{m\times n}{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{lgn}_1(A) \\ \vdots \\ \mathrm{lgn}_m(A) \end{bmatrix}}_{\text{blocs lignes}}, \quad \underset{n\times p}{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} \overrightarrow{b_1} & \cdots & \overrightarrow{b_p} \end{bmatrix}}_{\text{blocs colonnes}}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \mathrm{lgn}_1(A)\overrightarrow{b_1} & \overbrace{\mathrm{lgn}_1(A)\overrightarrow{b_2}}^{\in\mathbb{R}} & \cdots & \mathrm{lgn}_1(A)\overrightarrow{b_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{lgn}_m(A)\overrightarrow{b_1} & \mathrm{lgn}_m(A)\overrightarrow{b_2} & \cdots & \mathrm{lgn}_m(A)\overrightarrow{b_p} \end{bmatrix}$$

Ce n'est pas une matrice par blocs, chaque composante est réelle :

$$\mathrm{lgn}_i(A)\overrightarrow{b_j} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \in \mathbb{R}.$$

3. $A = \begin{bmatrix} \overrightarrow{a_1} & \overrightarrow{a_2} & \cdots & \overrightarrow{a_n} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \mathrm{lgn}_1(B) \\ \vdots \\ \mathrm{lgn}_n(B) \end{bmatrix}$

$$AB = \overrightarrow{a_1}\mathrm{lgn}_1(B) + \overrightarrow{a_2}\mathrm{lgn}_2(B) + \cdots + \underbrace{\overrightarrow{a_n}\mathrm{lgn}_n(B)}_{m\times p}$$

En effet,

$$\overrightarrow{a_i}\mathrm{lgn}_i(B) = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ip} \end{bmatrix}$$

est de taille $m \times p$:

$$\overrightarrow{a_i}\mathrm{lgn}_i(B) = \begin{bmatrix} a_{1i}b_{i1} & \cdots & a_{1i}b_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mi}b_{i1} & \cdots & a_{mi}b_{ip} \end{bmatrix}$$

2.8 Matrices triangulaires, matrices diagonales

Définition 2.29 *Matrices triangulaires, matrices diagonales*

Une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $j < i$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Une matrice $A = (A_{ij})$ est triangulaire supérieure par blocs si $A_{ij} = 0$ pour tout $j < i$.
Une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $j > i$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Une matrice $A = (A_{ij})$ est triangulaire inférieure par blocs si $A_{ij} = 0$ pour tout $j > i$.
Une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonale si $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Une matrice $A = (A_{ij})$ est diagonale par blocs si $A_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$.

Inverse des matrices triangulaires par bloc

Soit A une matrice de taille $n \times n$ où $n = n_1 + n_2$

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array} & \end{array}$$

On suppose que A est inversible, et on décompose A^{-1} en blocs de même taille que A :

$$A^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} n_1 \\ n_2. \end{array} \\ \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array} & \end{array}$$

On a alors
$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{bmatrix}.$$

Par ailleurs, la décomposition en blocs de la matrice $\mathbb{I}_n$ s'écrit
$$\mathbb{I}_n = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n_1} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{n_2} \end{bmatrix}.$$

On a donc
$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n_1} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{n_2} \end{bmatrix}.$$

Donc
$$\begin{cases} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = \mathbb{I}_{n_1} \\ A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0_{n_1\times n_2} \\ A_{22}B_{21} = 0_{n_2\times n_1} \\ A_{22}B_{22} = \mathbb{I}_{n_2} \end{cases}$$

Donc A_{22} est inversible et B_{22} est son inverse.

De plus,
$$A_{22}B_{21} = 0_{n_2\times n_1} \Rightarrow A_{22}^{-1}A_{22}B_{21} = A_{22}^{-1}0_{n_2\times n_1}$$
donc $B_{21} = 0_{n_2\times n_1}$.

Donc
$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = \mathbb{I}_{n_1} \Rightarrow A_{11}B_{11} = \mathbb{I}_{n_1},$$
donc A_{11} est inversible et B_{11} est son inverse.

Enfin,
$$A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0_{n_1\times n_2} \Rightarrow A_{11}^{-1}A_{11}B_{12} + A_{11}^{-1}A_{12}B_{22} = A_{11}^{-1}0_{n_1\times n_2}$$
donc $B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}$.

On vient de démontrer une implication du théorème suivant. La réciproque se vérifie en multipliant les matrices entre elles.

Théorème 2.30

Si A est une matrice de taille $n \times n$ triangulaire supérieure par blocs.
$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array} & \end{array}$$

Alors A est inversible si et seulement si A_{11} et A_{22} sont inversibles. Et dans ce cas,
$$A^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array} & \end{array}$$